

TD 4

Exercice 1. Soit J (respectivement G) la matrice d'itération de la méthode itérative de Jacobi (respectivement Gauss-Seidel) pour la résolution du système linéaire $Ax = b$. Le but de cet exercice est de montrer (sur des exemples) qu'en toute généralité, les deux méthodes ne sont pas comparables.

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\rho(J) < 1 < \rho(G)$.

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\rho(G) < 1 < \rho(J)$.

Exercice 2. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$ une matrice à diagonale dominante stricte c'est-à-dire telle que $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ pour tout $i = 1, \dots, N$. Montrer que A est inversible et que la méthode de Jacobi (pour calculer la solution de $Ax = b$) converge.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement si $-1/2 < a < 1$ et que la méthode de Jacobi converge si et seulement si $-1/2 < a < 1/2$.

Exercice 4. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \text{Id} - E - F$ avec

$$E = - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que $(\frac{1}{\omega}\text{Id} - E)$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \sqrt{2}/2$.
3. Pour $0 < \omega < 2$, $\omega \neq \sqrt{2}/2$, on considère la méthode itérative (pour trouver la solution de $Ax = b$) suivante :

$$\left(\frac{1}{\omega}\text{Id} - E\right)x^{n+1} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}\text{Id}\right)x^n + b.$$

Calculer, en fonction de ω , les valeurs propres de $\mathcal{L}_\omega = (\frac{1}{\omega}\text{Id} - E)^{-1} (F + \frac{1-\omega}{\omega}\text{Id})$ et son rayon spectral.

4. Pour quelles valeurs de ω la méthode est-elle convergente ? Déterminer $\omega_0 \in]0, 2[$ tel que $\rho((\mathcal{L}_\omega)_{\omega_0}) = \min\{\rho((\mathcal{L}_\omega)_\omega), 0 < \omega < 2, \omega \neq \sqrt{2}/2\}$.